ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ PHƯỢNG

CÁC ƯỚC SỐ CỦA SỐ MERSENNE

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ PHƯỢNG

CÁC ƯỚC SỐ CỦA SỐ MERSENNE

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

$\phi(m)$	Hàm Euler của m.
$\sigma(m)$	Hàm tổng các ước của m.
$\tau(m)$	Hàm số các ước của m.
$\Omega(m)$	Số thừa số nguyên tố của m.
$\omega(m)$	Tương ứng tính bội hoặc không tính bội của m.
$\log x$	Logarit tự nhiên của x.
$[a, b]$	Bội chung nhỏ nhất của hai số a, b.
(a, b)	Ước chung lớn nhất của hai số a, b.

Mở đầu

Các số Mersenne và số hoàn hảo là đề tài xuyên suốt của lý thuyết số, từ thời Hy Lạp cổ đại cho đến ngày hôm nay. Đây là một chủ đề vừa phù hợp với chương trình Toán bậc THPT, lại vừa chứa đựng những nghiên cứu mới. Dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TSKH. Hà Huy Khoái, tác giả chọn đề tài " Các ước số của số Mersenne".

Luận văn có hai mục tiêu chính:

- Giới thiệu một bức tranh toàn cảnh về lịch sử phát triển của số hoàn hảo và số Mersenne, những phát kiến và sai lầm trong quá trình nghiên cứu số Mersenne và số hoàn hảo.

- Trình bày một số kết quả nghiên cứu hiện đại về các ước số của số Mersenne. Đây là một vấn đề quan trọng, đặc biệt trong việc tìm ra những số nguyên tố lớn.

Với mục tiêu trên, tác giả tiến hành nghiên cứu hai nội dung chính tương ứng với hai chương:

Chương 1. Số hoàn hảo, số Mersenne trong lịch sử

1.1. Số hoàn hảo, từ Pythagoras đến Euler

1.2. Số Mersenne

1.3. Một số tính chất đặc biệt của số hoàn hảo chẵn

1.4. Số hoàn hảo lẻ

Chương 2. Các ước nguyên tố của số Mersenne

2.1. Ước lượng cận trên của tổng nghịch đảo các ước nguyên tố của số Mersenne

Qua bản luận văn này, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Khoa Toán - Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu trong suốt thời gian qua.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Giáo sư - Tiến sĩ khoa học Hà Huy Khoái - người đã tận tình, chỉ bảo, động viên khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Cuối cùng, tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và tất cả mọi người đã quan tâm, động viên và giúp đỡ để tác giả có thể hoàn thành luận văn của mình.

Tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý độc giả để bản luận văn này được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

Số hoàn hảo, số Mersenne trong lịch sử

1.1 Số hoàn hảo, từ Pythagoras đến Euler

Định nghĩa đầu tiên về số hoàn hảo dùng khái niệm gọi là *"phần chia hết"*, nguyên gốc là *"aliquot parts"*, vốn có nguồn gốc từ tiếng Latin, trong đó *"ali"* có nghĩa là *"khác"* và *"quot"* nghĩa là *"có bao nhiêu"*.

Một *"phần chia hết"* của một số là một thương thực sự của số đó, nghĩa là thương khác số ban đầu. Ví dụ $1, 2$ và 5 là các "phần chia hết" của 10 vì

$$1 = \frac{10}{10}, 2 = \frac{10}{5}, 5 = \frac{10}{2},$$

còn 10 không phải là một "phần chia hết" vì 10 không phải là một thương thực sự của 10.

Định nghĩa nguyên thủy: Một số được gọi là *hoàn hảo* nếu nó bằng tổng các *"phần chia hết"* của nó.

Ví dụ.

+) Số 6 có các phần chia hết là 1, 2, 3 và $1 + 2 + 3 = 6$ nên số 6 là một số hoàn hảo.

+) Số 10 có các phần chia hết là 1, 2, 5 và $1 + 2 + 5 = 8$ nên số 10 không phải là một số hoàn hảo.

Để có một định nghĩa hiện đại, người ta dùng khái niệm sau

Định nghĩa 1.1 *Hàm tổng các ước là hàm*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

trong đó n là một số nguyên dương và tổng chạy qua tất cả các ước nguyên dương của n (bao gồm cả 1 và chính nó).

Nhờ khái niệm này, ta có

Định nghĩa 1.2 *Một số tự nhiên n được gọi là hoàn hảo nếu*

$$\sigma(n) = 2n.$$

Khi $\sigma(n) < 2n$ *thì n được gọi là thiếu và khi* $\sigma(n) > 2n$ *thì n được gọi là thừa.*

Ví dụ.
+) Số 12 có các ước số là 1, 2, 3, 4, 6 và 12. Ta có
$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28 > 12$. Do đó số 12 là một số thừa.
+) Số 10 là số thiếu vì $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18 < 20$.
+) Các số 6, 28 là các số hoàn hảo vì $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, và $\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$.

Một cách tương đương, một số là hoàn hảo khi nó bằng tổng các ước thực sự của nó.

Theo tác giả C.M.Taisbak, dường như người Ai Cập cổ đại là những người đầu tiên sử dụng số hoàn hảo trong các tính toán của mình.

Aurelius Augustinus (354 – 430) trong quyển "The City of God" nhắc lại rằng Chúa trời thực hiện sự sáng tạo ra thế giới muôn loài trong 6 ngày, bởi vì sự hoàn hảo của công việc được thể hiện ở số 6. Nguồn gốc thứ hai của loài người sinh ra từ số thiếu 8: Kinh thánh nói rằng trong chiếc tàu của Noah có 8 linh hồn từ đó xuất hiện ra toàn bộ loài người, nhưng quá trình sáng tạo này không được hoàn hảo vì 8 là số "thiếu". Nguồn gốc này xem chừng không được coi trọng bằng nguồn gốc thứ nhất bởi lí do đơn giản: 6 là số hoàn hảo! Mặt trăng quay một vòng quanh Trái đất hết 28 ngày cũng bởi lí do 28 là một số hoàn hảo.

Theo Pythagoras, sự hoàn hảo của các con số phụ thuộc vào các ước số của nó. Những người theo trường phái Pythagoras luôn luôn tin tưởng vào số 6, họ xem nó là số đẹp nhất, tượng trưng cho sức khỏe và vẻ đẹp của con người. Pythagoras còn cho rằng con số 6 là hoàn hảo không phải là do Chúa đã chọn nó, mà bởi vì sự hoàn hảo là thuộc tính sở hữu của con số đó: "số 6 tự nó đã là hoàn hảo chứ không phải vì Chúa đã tạo ra vạn vật trong 6 ngày, thực ra thì ngược lại mới đúng, Chúa đã tạo ra vạn vật trong 6 ngày bởi vì đó là con số hoàn hảo và nó vẫn cứ hoàn hảo thậm chí nếu như chuyện đó không xảy ra."

Trong quyển "Cơ sở" của Euclid, viết khoảng 300 năm trước Công nguyên, mệnh đề 36 trong quyển thứ 9 của bộ "Cơ sở" nói rằng

"Bắt đầu từ đơn vị, gấp đôi liên tục rồi lấy tổng cho đến khi kết quả là một số nguyên tố, đem nhân với số cuối cùng trong tổng, ta sẽ nhận được một số hoàn hảo".

Sau đây ta thực hiện từng bước theo Euclid. Dãy số mà Euclid nói đến là

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Lấy tổng các số đầu tiên trong dãy ta có các kết quả

$$1 + 2 = 3;$$

$$1 + 2 + 4 = 7;$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15;$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$$

Ta chọn ví dụ số 31. Đem nhân với số cuối cùng trong tổng ta có

$$31.16 = 496,$$

là một số hoàn hảo!

Euclid cũng đã chứng minh được rằng nếu $p = 1 + 2 + 2^2 + \ldots.. + 2^n$ là một số nguyên tố thì $2^n p$ là một số hoàn hảo. Ông chỉ ra rằng $2^n p$ có tất cả các ước thực sự là $1, 2, \ldots, 2^n, p, 2p, \ldots, 2^{n-1}p$ và tổng của chúng đúng bằng $2^n p$.

Theo ngôn ngữ hiện đại, mệnh đề của Euclid trở thành

Mệnh đề 1.1 *Nếu n là số nguyên lớn hơn 1 thỏa mãn $2^n - 1$ là một số nguyên tố thì $2^{n-1}(2^n - 1)$ là một số hoàn hảo.*

Các nhà toán học sau này thường gọi phát hiện này là Định lí Euclid và các số có dạng $2^{n-1}(2^n - 1)$ (trong đó $2^n - 1$ là một số nguyên tố) là số Euclid. Nhưng Euclid mới chỉ cho chúng ta một chiều, và do đó một câu hỏi được đặt ra là: liệu còn số hoàn hảo nào khác không nằm trong các số có dạng này không? Đây có thể nói là một trong những vấn đề quan trọng trong lịch sử nghiên cứu số hoàn hảo.

Công trình ý nghĩa tiếp theo sau Euclid mà ta phải nhắc đến là của nhà toán học Nicomachus (60-120 sau Công nguyên). Năm 100, Nicomachus viết quyển "Introductio Arithmetica" trong đó ông phân loại các số dựa vào khái niệm số hoàn hảo. Theo đó, có 3 loại: số thừa, số thiếu và số hoàn hảo. Nicomachus đề ra các kết quả liên quan đến số hoàn hảo, đó là 5 khẳng định (hay phán đoán?) sau

1. Số hoàn hảo thứ n có n chữ số.
2. Mọi số hoàn hảo đều chẵn.
3. Số hoàn hảo có chữ số cuối cùng luân phiên giữa 6 và 8.
4. Mọi số hoàn hảo đều có dạng $2^{n-1}(2^n - 1)$ trong đó $n > 1$ và $2^n - 1$ là một số nguyên tố.
5. Có vô hạn số hoàn hảo.

Năm khẳng định của Nicomachus chỉ có được từ sự phân tích cách tìm số hoàn hảo của Euclid đã nói ở trên và chỉ với 4 ví dụ về số hoàn hảo thời điểm đó: 6, 28, 496, 8128. Và mặc dù chưa được kiểm chứng nhưng chúng đã được công nhận trong nhiều năm.

Đến tận thời kì đầu giai đoạn Phục Hưng ở châu Âu (khoảng năm 1500), các khẳng định của Nicomachus vẫn được xem là đúng. Carolus Bovillus $(1470 - 1553)$ - một nhà thần học và triết học xuất bản một cuốn sách về số hoàn hảo năm 1509, trong đó ông cho rằng mọi số hoàn hảo là số chẵn, nhưng chứng minh của ông chỉ áp dụng được cho các số Euclid.